מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: תשע"ג, **מועד ב**

מספר השאלון: **035806, 316**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה והסתברות — $2\times 16\frac{2}{3}$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה במישור — $2\times 16\frac{2}{3}$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי — $2\times 16\frac{2}{3}$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
   הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
   חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
   שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

דولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: 2013، **الموعد "ب"**

رقم النّموذج: **035806، 316**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النّموذج ثلاثة فصول.

الفصل الأوّل: الجبر والاحتمال $2\times 16\frac{2}{3}$ – $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثّاني: الهندسة وحساب المثلّثات في المستوى $2\times 16\frac{2}{3}$ – $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثّالث: حساب التّفاضل والتّكامل $2\times 16\frac{2}{3}$ – $33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع – 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
   فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
   عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
   استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

ב ה צ ל ח ה!

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

1. يحفر رائد وشادي معًا قناة واحدة في 12 ساعة.
إذا حفر رائد بمفرده $\frac{1}{3}$ القناة، وبعد أن يُنهي حصّته في الحفر يحفر شادي بمفرده ما تبقّى من القناة، ينتهي الحفر بعد مرور $23\frac{1}{3}$ ساعة.
كم قناة كاملة على الأكثر يحفر رائد بمفرده في أقلّ من 100 ساعة؟ القنوات مطابقة للقناة المعطاة.
قدرتا عمل شادي ورائد لا تتغيّران.

إجابة السؤال 1

أ.

	زمن العمل (ساعات)	وتيرة العمل $\left(\frac{1}{\text{الساعة}}\right)$	مجموع العمل
رائد	$\frac{x}{3}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}$
شادي	$\frac{2y}{3}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{2}{3}$

$\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1 \quad \Rightarrow \quad$ I. $12y+12x=xy$

$\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=23\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad$ II. $x=70-2y$

من I وَ II ينتج: $y^2-41y+420=0$

$\Downarrow$

الزمن الذي يحفر فيه شادي بمفرده قناة واحدة: $y=$ 20 ساعة أو $y=$ 21 ساعة

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

الزمن الذي يحفر فيه رائد بمفرده قناة واحدة: $x=$ 30 ساعة أو $x=$ 28 ساعة

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

في أقلّ من 100 ساعة عدد القنوات التي يحفرها رائد هو أصغر من: $\frac{100}{30}=3.33$ أو $\frac{100}{28}=3.57$

$\Downarrow$

عدد القنوات الكاملة التي يحفرها رائد على الأكثر في أقلّ من 100 ساعة: 3 قنوات

/يتبع في صفحة 3/

السؤال 2

2. معطاة متوالية a_n : $a_1 , a_2 , a_3 ,..., a_n ,...$

ومعطاة متوالية المجاميع S_n : $S_1 , S_2 , S_3 ,..., S_n ,...$

S_n هو مجموع n الحدود الأولى في المتوالية a_n .

أ. برهن أنّ المتوالية a_n هي متوالية هندسيّة أساسها هو b ، إذا كانت متوالية المجاميع S_n تحقّق لكلّ n طبيعيّ: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$ ، $S_1 = 3$ ، $b \neq 0$.

ب. معطى أنّ $|b| < 1$.

نبني من المتوالية a_n متواليتين هندسيّتين، I وَ II :

I. $a_3 , a_7 , a_{11} , a_{15} ,...$

II. $a_1 , -a_3 , a_5 , -a_7 ,...$

T هو مجموع الحدود التي عددها لانهائيّ في المتوالية I ،

M هو مجموع الحدود التي عددها لانهائيّ في المتوالية II .

عبّر بدلالة b عن النسبة $\frac{M}{T}$. بسِّط التعبير قدر الإمكان.

إجابة السؤال 2

أ. بالنسبة لِ $1 < n$:

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = b \cdot S_n + 3 - (b \cdot S_{n-1} + 3)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} = b(S_n - S_{n-1}) = b \cdot a_n$$

$$\Downarrow$$

الأساس بالنسبة لِ $1 < n$ هو:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b$$

نفحص إذا كان الأساس بالنسبة

لِ $n = 1$ ، هو أيضًا b:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{bS_1 + 3 - S_1}{S_1} = \frac{b \cdot 3 + 3 - 3}{3} = b$$

الأساس هو عدد ثابت b ، ولذلك المتوالية a_n هي هندسيّة.

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. أساس المتوالية I هو: $\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 \cdot b^6}{a_1 \cdot b^2} = b^4$

أساس المتوالية II هو: $\frac{-a_3}{a_1} = \frac{-a_1 b^2}{a_1} = -b^2$

$0 < b^4 < 1$ ، لذلك

مجموع المتوالية I هو: $T = \frac{a_3}{1-b^4} = \frac{a_1 \cdot b^2}{1-b^4}$

$-1 < -b^2 < 0$ ، لذلك

مجموع المتوالية II هو: $M = \frac{a_1}{1+b^2}$

من هنا: $\frac{M}{T} = \frac{a_1}{1+b^2} \cdot \frac{1-b^4}{a_1 \cdot b^2}$

$\Downarrow$

بعد قسمة طرفَي المعادلة على a_1 وعلى $1+b^2$

ينتج: $\frac{M}{T} = \frac{1-b^2}{b^2}$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

3. من بين جميع طلّاب الثواني عشر في مدينة معيّنة، يبحثون عن طلّاب يلائمون لدورة خاصّة.
تلائم الدورة الطلّاب الذين لديهم قدرات تقنيّة.
تشخّص الممتحِنات 80% من بين الطلّاب الذين بالفعل لديهم قدرات تقنيّة على أنّ لديهم قدرات تقنيّة، ويشخّصنَ 10% من بين الطلّاب الذين ليس لديهم قدرات تقنيّة على أنّ لديهم قدرات تقنيّة.
من بين الطلّاب الذين تمّ تشخيصهم بأنّ لديهم قدرات تقنيّة، النسبة المئويّة للطلّاب الذين بالفعل لديهم قدرات تقنيّة هي 4 أضعاف النسبة المئويّة للطلّاب (في هذه المجموعة) الذين ليس لديهم قدرات تقنيّة.
أ. ما هو الاحتمال بأن تكون بالفعل لطالب ثاني عشر في هذه المدينة قدرات تقنيّة؟
ب. في نفس المدينة، جميع أولئك الذين تمّ تشخيصهم بأنّ لديهم قدرات تقنيّة شاركوا هم فقط في الدورة.
في هذه المدينة يوجد 600 طالب ثاني عشر.
من بين المشاركين في الدورة، ما هو عدد الطلّاب الذين ليس لديهم قدرات تقنيّة؟

إجابة السؤال 3

أ. نرمز: A — مجموعة الطلّاب الذين لديهم قدرات تقنيّة.
B — مجموعة الطلّاب الذين تمّ تشخيصهم بأنّ لديهم قدرات تقنيّة.

حسب المعطى: $P(B/A) = 0.8$ ، $P(B/\overline{A}) = 0.1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

I. $P(B \cap A) = 0.8P(A)$ ، II. $P(B \cap \overline{A}) = 0.1 \cdot P(\overline{A}) = 0.1(1 - P(A))$,

حسب المعطى: $P(A/B) = 4P(\overline{A}/B)$

$\Downarrow$

III. $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{4P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$

من I وَ II وَ III ينتج: $0.8P(A) = 4 \cdot 0.1(1 - P(A))$

$\Downarrow$

$P(A) = \frac{1}{3}$

/يتبع في صفحة 6/

تكملة إجابة السؤال 3.

ب.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0.8P(A) + 0.1(1 - P(A))$$

$$\Downarrow$$

$$P(B) = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

لذلك من بين المشاركين في الدورة الاحتمال بأن لا تكون للطالب قدرة تقنيّة هو:

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

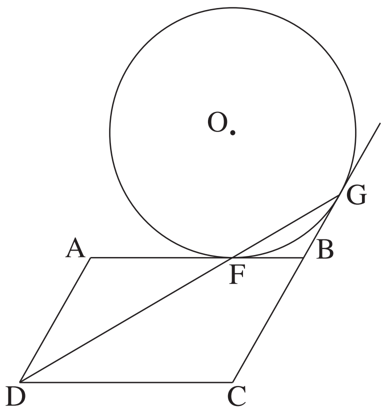
عدد الطلّاب في الدورة هو: $600 \times P(B)$

عدد الطلّاب في الدورة الذين ليس لديهم قدرة تقنيّة هو:

$$600 \cdot P(B) \cdot P(\overline{A}/B) = 600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = 40$$

/يتبع في صفحة 7/

السؤال 4



معطى متوازي الأضلاع ABCD .

الضلع AB يمسّ في النقطة F دائرة مركزها O .

امتداد الضلع CB يمسّ الدائرة في النقطة G (انظر الرسم).

معطى أنّ: AF = AD .

أ. برهن أنّ النقطة F تقع على المستقيم DG .

ب. معطى أيضًا أنّ: BO = BC ، $FC \perp DC$.

(1) برهن أنّ OF = FC .

(2) برهن أنّ $FB = \frac{1}{2}BO$.

إجابة السؤال 4

أ. معطى أنّ: ABCD — متوازي أضلاع

BF وَ BG يمسّان الدائرة

AF = AD

يجب أن نبرهن أنّ: $\sphericalangle AFD + \sphericalangle AFG = 180^o$

البرهان:

$FB = BG$ المماسّان للدائرة اللذان يخرجان من نفس النقطة متساويان.

$\Downarrow$

$\sphericalangle FGB = \sphericalangle GFB = \alpha$ مقابل الأضلاع المتساوية في المثلّث توجد زوايا متساوية.

$\Downarrow$

في المثلّث FBG يتحقّق: $\sphericalangle FBG = 180^o - 2\alpha$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o .

$\sphericalangle FBG = \sphericalangle A$ لأنّهما زاويتان متبادلتان بين متوازيين.

$\sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF$ مقابل الأضلاع المتساوية في المثلّث توجد زوايا متساوية.

$\Downarrow$

$\sphericalangle AFD = \frac{180^0 - \sphericalangle A}{2}$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o

$\Downarrow$

$\sphericalangle AFD = \frac{180^o - (180^o - 2\alpha)}{2} = \alpha$

وجدنا $\sphericalangle GFB = \alpha$ ،

لذلك: $\sphericalangle AFG = 180^o - \sphericalangle GFB = 180^o - \alpha$ F على الضلع AB .

$\sphericalangle AFD + \sphericalangle AFG = \alpha + 180^0 - \alpha = 180^o$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

ب. (1) $\sphericalangle OFB = 90^o$ مماسّ للدائرة معامد لنصف القطر

حسب المعطى: $\sphericalangle DCF = 90^o$

$\Downarrow$

$\sphericalangle BFC = \sphericalangle DCF = 90^o$ الزاويتان المتبادلتان بين متوازيَيْن متساويتان

$\Downarrow$

$\sphericalangle BFC + \sphericalangle OFB = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Downarrow$

F على المستقيم OC

$\Downarrow$

$OF = FC$ BF هو ارتفاع في المثلّث المتساوي الساقين OBC، لذلك BF هو أيضًا مستقيم متوسّط للضلع OC .

(2) $\sphericalangle FBC = 180^o - \sphericalangle FBG = 180^o - (180^o - 2\alpha) = 2\alpha$ مجموع الزاويتين المتجاورتين هو 180^o

$\Downarrow$

I. $\sphericalangle FBO = \sphericalangle FBC = 2\alpha$ BF هو ارتفاع في المثلّث المتساوي الساقين OBC ، لذلك BF هو أيضًا منصّف للزاوية $\sphericalangle OBC$

II. $\sphericalangle FBO = \sphericalangle GBO = \frac{1}{2} \sphericalangle FBG = 90^o - \alpha$ القطعة التي تَصِل مركز الدائرة بالنقطة التي يخرج منها مماسّان للدائرة، تنصّف الزاوية التي بين المماسّين.

من I وَ II ينتج: $90^o - \alpha = 2\alpha$

$\Downarrow$

$\alpha = 30^o$

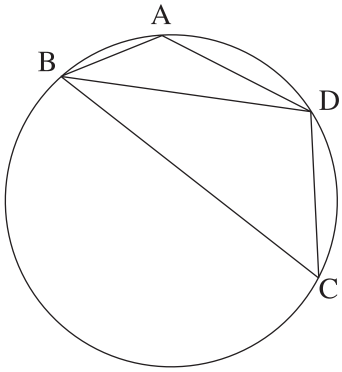
$\sphericalangle FOB = 90^o - \sphericalangle FBO = 90^o - (90^o - \alpha) = \alpha$ مجموع الزوايا في المثلّث هو 180^o

$\Downarrow$

$FB = \frac{1}{2}BO$ إذا كان في المثلّث القائم الزاوية زاوية حادّة مقدارها 30^o، فإنّ الضلع القائم المقابل لهذه الزاوية يساوي نصف الوتر.

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5



5. الشكل الرباعيّ ABCD محصور داخل دائرة.
الوتر BD ينصّف الزاوية ABC (انظر الرسم).
معطى أنّ: $AB = \sqrt{3}$ ، $BC = 3\sqrt{3}$ ،
$\sphericalangle ADC = 120^o$.

أ. (1) جد مقدار الزاوية ABD .
(2) جد طول الوتر BD .

ب. النقطة K تقع على الوتر BD
بحيث $\Delta ABK \sim \Delta DBA$ بالتلاؤم.
جد مساحة المثلّث ABK .

إجابة السؤال 5

أ. (1) $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^o$ مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعيّ المحصور داخل دائرة هو 180^o

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ABC = 180^o - 120^o = 60^o$$

$$\Downarrow$$

$\frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD = 30^o$ حسب المعطى BD ينصّف $\sphericalangle ABC$.

(2) $AD = DC = a$ في الدائرة يوجد للزاويتين المحيطيّتين المتساويتين وتران متساويان.

حسب نظريّة جيب التمام (الكوسينوس) في المثلّث ABD :

$$a^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos\sphericalangle ABD$$

$$\Downarrow$$

I. $a^2 = 3 + BD^2 - 2\sqrt{3}\cdot BD\cos 30^o$

حسب نظريّة جيب التمام (الكوسينوس) في المثلّث CBD:

$$a^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD\cos\sphericalangle DBC$$

$$\Downarrow$$

II. $a^2 = 9\cdot 3 + BD^2 - 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot BD\cos 30^o$

من طرح I من II ينتج: $0 = 24 - 6\cdot BD$

$$\Downarrow$$

$$BD = 4$$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب.
$$\frac{S_{\Delta DBA}}{S_{\Delta ABK}} = \frac{BD^2}{AB^2} = \frac{4^2}{3}$$

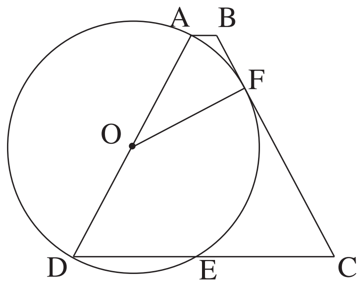
في المثلّثين المتشابهين نسبة المساحتين تساوي تربيع نسبة التشابه.

$$S_{\Delta DBA} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \sphericalangle ABD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABK} = \frac{3}{4^2} \cdot S_{\Delta DBA} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 6



6. معطى شبه منحرف متساوي الساقين ABCD ($AD = BC$) .

الساق AD هو قطر في دائرة مركزها O .

الساق BC يمسّ الدائرة في النقطة F .

الدائرة تقطع القاعدة DC في النقطة E (انظر الرسم) .

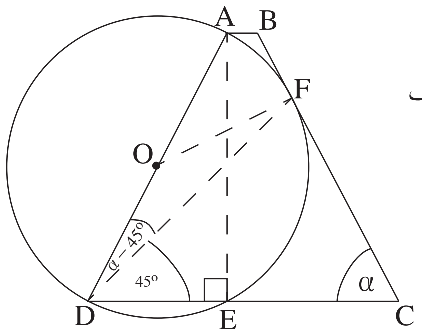
معطى أنّ : $\sphericalangle BCD = \alpha$.

أ. عبّر بدلالة α عن مقدار الزاوية FOD .

ب. (1) عبّر بدلالة α عن مقدار الزاوية ODF .

(2) عبّر بدلالة α عن النسبة $\frac{DE}{DC}$.

إجابة السؤال 6



أ. $\sphericalangle OFC = 90^o$ مماسّ معامد لنصف القطر.

$\sphericalangle ODC = \sphericalangle FCD = \alpha$ زاويتا القاعدة في شبه المنحرف المتساوي الساقين متساويتان.

$\sphericalangle FOD = 360^o - (90^o + 2\alpha)$ مجموع زوايا الشكل الرباعيّ هو 360^o

$\Downarrow$

$\sphericalangle FOD = 270^o - 2\alpha$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 6.

ب. (1) $OD = OF$ نصفا قطر في دائرة.

$\Downarrow$

$\sphericalangle ODF = \sphericalangle OFD$ في المثلّث مقابل الأضلاع المتساوية توجد زوايا متساوية.

$\Downarrow$

$$\sphericalangle ODF = \frac{180^o - \sphericalangle FOD}{2} = \alpha - 45^o$$

(2) $\sphericalangle AED = 90^o$ زاوية محيطيّة تستند على قطر الدائرة

$\Downarrow$

في المثلّث ADE يتحقّق:

I. $DE = AD\cos\alpha = 2R\cos\alpha$

$$\sphericalangle FDC = \sphericalangle ODC - \sphericalangle ODF = \alpha - (\alpha - 45^o) = 45^o$$

حسب نظريّة الجيب (السينوس)

في المثلّث DFC:

$$\frac{DC}{\sin(180^o - (45^o + \alpha))} = \frac{DF}{\sin\alpha}$$

$\Downarrow$

II. $DC = \dfrac{DF\sin(45^o + \alpha)}{\sin\alpha}$

في المثلّث المتساوي الساقين DOF يتحقّق:

$$\frac{\frac{1}{2}DF}{R} = \cos(\alpha - 45^o)$$

$\Downarrow$

III. $DF = 2R\cos(\alpha - 45^o)$

من تعويض III في II ينتج:

IV. $DC = \dfrac{2R\cos(\alpha - 45^o)\sin(45^o + \alpha)}{\sin\alpha}$

من I وَ IV ينتج:

$$\frac{DE}{DC} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos(\alpha - 45^o)\sin(45^o + \alpha)}$$

/ يتبع في صفحة 13 /

السؤال 7

7. معطاة الدالّة $f(x) = x^2 - \cos\frac{x}{2}$ في المجال $2\pi \le x \le 5\pi$.

أ. (1) جد مجالات تصاعد وتنازل دالّة المشتقّة $f'(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات) في المجال المعطى.

(2) بيّن أنّ دالّة المشتقّة $f'(x)$ موجبة في المجال المعطى.

(3) فقط حسب الإجابتين عن البندين الفرعيّين (1) وَ (2)، ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا لدالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال المعطى.

(4) كم حلاً يوجد للمعادلة $f'(x) = 40$ في المجال المعطى؟ علّل.

ب. (1) اكتب القيمة القصوى لدالّة المشتقّة الثانية $f''(x)$ في المجال المعطى.

(2) هل المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة الثانية $f''(x)$ في المجال المعطى، تساوي قيمة التكامل المحدود $\int_{2\pi}^{5\pi} (f'(x) - f''(x))\,dx$ ؟

علّل.

إجابة السؤال 7

أ. (1) الطريقة I

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$f''(x) = 2 + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$$
$$\Downarrow$$
$f''(x) \neq 0$ لأنّ $\cos\frac{x}{2} \neq -8$
$$\Downarrow$$
لا توجد نقاط قصوى داخليّة لـِ $f'(x)$

نعوّض مثلاً $x = 4\pi$ وينتج: $f''(4\pi) = 1\frac{3}{4} > 0$
$$\Downarrow$$
$f''(x) > 0$ لكلّ x في المجال المعطى
$$\Downarrow$$
$f'(x)$ تصاعديّة لكلّ x في المجال المعطى

الطريقة II

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$$

بما أنّ $-\frac{1}{4} \le \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2} \le \frac{1}{4}$
$$\Downarrow$$
ينتج: $f''(x) > 0$ لكلّ x في المجال المعطى

/ يتبع في صفحة 14 /

تكملة إجابة السؤال 7.

(2) $f'(x)$ تصاعديّة لكلّ x في المجال المعطى

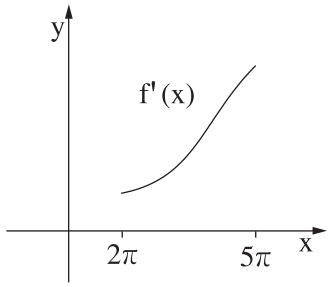
$\Downarrow$

القيمة الصغرى لِـ $f'(x)$: $f'(2\pi) = 4\pi + \frac{1}{2}\sin\pi = 4\pi$

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ لكلّ x في المجال المعطى

(3) حسب البندين الفرعيّين "أ (1)" وَ "أ (2)" $f'(x)$ موجبة وتصاعديّة (فحص نقاط الالتواء غير مطلوب):



(4) $f'(x)$ تصاعديّة لكلّ x في المجال المعطى

$\Downarrow$

القيمة القصوى لِـ $f'(x)$: $f'(5\pi) = 10\pi + \frac{1}{2}\sin 2.5\pi = 31.9$

$\Downarrow$

المستقيم $y = 40$ لا يقطع $f'(x)$

$\Downarrow$

لا يوجد حلّ للمعادلة $f'(x) = 40$

/ يتبع في صفحة 15 /

تكملة إجابة السؤال 7.

ب. (1) وجدنا أنّ: $f''(x) = 2 + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$

القيمة العظمى لِـ $\cos\frac{x}{2}$ هي 1 ،
لذلك القيمة العظمى لِـ $f''(x)$ هي: $2\frac{1}{4}$

(2) وجدنا في البند الفرعيّ "أ (2)" أنّ
القيمة الصغرى لِـ $f'(x)$ في المجال المعطى هي: 4π

في المجال المعطى القيمة القصوى لِـ $f''(x)$
أصغر من القيمة الصغرى لِـ $f'(x)$
لذلك في المجال المعطى: $f'(x) > f''(x)$

$$\Downarrow$$

الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ فوق الرسم البيانيّ لِـ $f''(x)$

$$\Downarrow$$

المساحة تساوي قيمة التكامل

/ يتبع في صفحة 16 /

السؤال 8

معطاة الدالّة $f(x)$ المعرَّفة لكلّ x ، ومعطاة الدالّة $g(x)$.

معطى أنّ: $g(x) = k + 2x$ ، $\int_0^1 g(x)dx = 0$. k هو بارامتر.

أ. جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ مع المحورين.

ب. معطى أيضًا أنّه في المجال $x \geq 0$ يتحقّق: $f(x) \geq g(x)$ ، $f''(x) > 0$ ، $f(0) = k$.
ارسم في نفس هيئة المحاور رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$ ورسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$ ، في المجال $x \geq 0$. علّل.

جـ. في المجال $x \geq 0$ ، أيّة مساحة أكبر: المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحورين أم المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ والمحور x والمستقيم $x = 1$ ؟ علّل.

د. معطى أيضًا أنّ: $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + f(0)$ ، a هو بارامتر،
الرسم البيانيّ لِـ$g(x)$ يمسّ الرسم البيانيّ لِـ $f(x)$ في نقطة موجودة في المجال $x \geq 0$.
جد الدالّة $f(x)$.

إجابة السؤال 8

أ.

$$\int_0^1 g(x)d(x) = \int_0^1 (k+2x)dx = [k \cdot x + x^2]_0^1 = k \cdot 1 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) = -1 + 2x$$

$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad g(0) = -1$$

نقطتا التقاطع
مع المحورين: $(0, -1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

/ يتبع في صفحة 17 /

تكملة إجابة السؤال 8.

ب. معطى في المجال $x \geq 0$: $f''(x) > 0$ ، $g(x)$ هي خطّ مستقيم

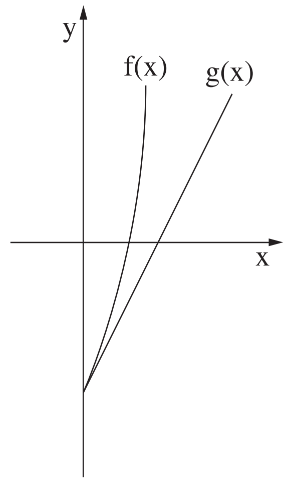
$\Downarrow$

$f(x)$ مقعّرة باتّجاه الأعلى $\cup$

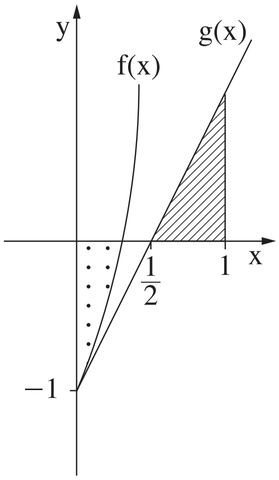
معطى أيضًا أنّ: $f(x) \geq g(x)$ ، ووجدنا أنّ $f(0) = g(0) = -1$

لذلك: الرسم البيانيّ لِـ$f(x)$ بالفعل فوق الرسم البيانيّ لِـ$g(x)$ لكلّ x لا يساوي 0

من هنا في المجال $x \geq 0$:



جـ. I. مساحة المثلّث الذي يتكوّن بواسطة المستقيمين $g(x)$ وَ $x = 1$
والمحور x ، تساوي مساحة المثلّث الذي يتكوّن بواسطة
المستقيم $g(x)$ والمحورين (انظر الرسم) .



II. المساحة المنقّطة في الرسم أصغر من مساحة المثلّث الذي يتكوّن بواسطة
$g(x)$ والمحورين، لأنّ $f(x)$ فوق $g(x)$ باستثناء في $x = 0$.

لذلك حسب I وَ II في المجال $x \geq 0$:
المساحة المحصورة بين $f(x)$ والمحورين (المساحة المنقّطة) <u>أصغر</u>
من المساحة المحصورة بين $g(x)$، والمحور x والمستقيم $x = 1$ (المساحة المخطّطة في الرسم) .

/ يتبع في صفحة 18 /

تكملة إجابة السؤال 8.

د. من اشتقاق f(x) ينتج: III. $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

g(x) يمسّ f(x) في x = 0، لذلك: IV. $f'(0) = 2$

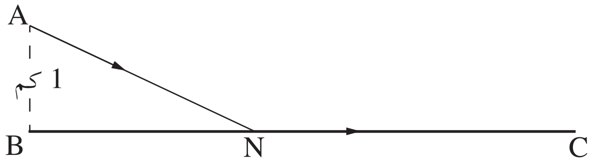
من III وَ IV ينتج: $a = 2$

لذلك ينتج: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

/ يتبع في صفحة 19 /

السؤال 9

9. خرج داني من النقطة A ، التي تقع في حقل على بُعد 1 كم عن الشارع BC .



سار داني في الحقل بخطّ مائل

بسرعة ثابتة v ، ووصل إلى

الشارع BC في نقطة ما N (انظر الرسم) .

سار داني على الشارع بسرعة هي $\frac{13}{12}$ ضعف السرعة التي سار بها في الحقل، ووصل إلى النقطة C في الشارع .

المسافة بين B وَ C هي 6 كم.

ما هو طول المسار ANC إذا عُلِم أنّ داني قَطَعَهُ في أقصر وقت ممكن؟

إجابة السؤال 9

أ. نرمز مثلاً:

$$BN = x$$
$$\Downarrow$$
$$AN = \sqrt{1+x^2} \quad , \; NC = 6 - x$$
$$\Downarrow$$

الزمن الذي يقطع فيه داني المسار ANC :

$$t(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v} + \frac{6-x}{\frac{13}{12}\cdot v}$$
$$\Downarrow$$
$$t'(x) = \frac{1}{v}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{12}{13}\right)$$
$$t'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 13x = 12\sqrt{1+x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$13^2 x^2 = 12^2(1+x^2)$$
$$\Downarrow$$
$$(x > 0) \qquad x = \frac{12}{5} = 2.4$$

فحص نهاية صغرى:

$$t'(1) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{12}{13}\right) < 0$$
$$t'(3) = \frac{1}{v}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{13}\right) > 0$$

طول المسار ANC الأقصر ما يمكن:

$$AN + NC = \sqrt{1+x^2} + 6 - x$$
$$\Downarrow$$
$$AN + NC = \sqrt{1+2.4^2} + 6 - 2.4 = 6.2 \text{ كم}$$